

Spis treści

Przedmowa	XI
Literatura uzupełniająca	XIII
Porady dla Czytelnika	XIV
ROZDZIAŁ 1. POCZĄTKI ALGEBRY	1
§1. Krótko o historii	2
§2. Pewne zagadnienia modelowe	5
1. Zagadnienie rozwiązalności równań przez pierwiastniki	5
2. Zagadnienie stanów cząsteczki wieloatomowej	7
3. Zagadnienie kodowania informacji	7
4. Zagadnienie nagrzanej płytki	8
§3. Układy równań liniowych. Pierwsze kroki	9
1. Terminologia	9
2. Równoważność układów liniowych	11
3. Sprowadzanie do postaci schodkowej	12
4. Badanie układu równań liniowych	14
5. Różne uwagi i przykłady	16
§4. Wyznaczniki niskich stopni	18
Ćwiczenia	22
§5. Zbiory i odwzorowania	22
1. Zbiory	23
2. Odwzorowania	24
Ćwiczenia	29
§6. Relacje równoważności. Faktoryzacja odwzorowań	30
1. Relacje dwuargumentowe	30
2. Relacje równoważności	30
3. Faktoryzacja odwzorowań	32
4. Zbiory uporządkowane	33
ćwiczenia	34
§7. Zasada indukcji matematycznej	34
Ćwiczenia	39
§8. Permutacje	39
1. Standardowy zapis permutacji	39
2. Rozkład permutacji na cykle	41
3. Znak permutacji	44
4. Działanie permutacji na funkcje	46
Ćwiczenia	49
§9. Arytmetyka liczb całkowitych	50

1. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki	50
2. NWD i NWW w $\mathbb{Z}$	51
3. Algorytm dzielenia z resztą w $\mathbb{Z}$	52
Ćwiczenia	53

ROZDZIAŁ 2. MACIERZE **54**

§1. Przestrzenie wektorów wierszowych i kolumnowych	54
1. Motywacja	54
2. Podstawowe definicje	55
3. Kombinacje liniowe. Powłoka liniowa	56
4. Liniowa zależność	57
5. Baza. Wymiar	58
Ćwiczenia	61
§2. Rząd macierzy	61
1. Powrót do równań	61
2. Definicja rzędu macierzy	63
3. Kryterium niesprzeczności	65
Ćwiczenia	66
§3. Przekształcenia liniowe. Działania na macierzach	67
1. Macierze i przekształcenia	67
2. Iloczyn macierzy	70
3. Transpozycja macierzy	72
4. Rząd iloczynu macierzy	73
5. Macierze kwadratowe	74
6. Klasy macierzy równoważnych	79
7. Obliczanie macierzy odwrotnej	81
8. Przestrzeń rozwiązań	84
Ćwiczenia	86

ROZDZIAŁ 3. WYZNACZNIKI **90**

§1. Definicja i podstawowe własności wyznaczników	90
1. Motywacja geometryczna	90
2. Podejście kombinatoryczno-analityczne	92
3. Podstawowe własności wyznaczników	93
Ćwiczenia	100
§2. Dalsze własności wyznaczników	101
1. Rozwinięcie wyznacznika względem kolumny lub wiersza	101
2. Wyznaczniki specjalnych macierzy	104
Ćwiczenia	107
§3. Zastosowania wyznaczników	109
1. Kryterium nieosobliwości macierzy	109
2. Wzory Cramera	111
3. Metoda minorów obejmujących	113
Ćwiczenia	115
§4. Uwagi o konstrukcji teorii wyznaczników	118
1. Pierwsza konstrukcja aksjomatyczna	118
2. Druga konstrukcja aksjomatyczna	119

3. Konstrukcja indukcyjna	119
4. Multiplikatywna charakteryzacja wyznacznika	119
Ćwiczenia	120

ROZDZIAŁ 4. GRUPY, PIERŚCIEŃ, CIAŁA **121**

§1. Zbiory z działaniami	121
1. Działania dwuargumentowe	121
2. Półgrupy i monoidy	122
3. Uogólniona łączność; potęgi	124
4. Elementy odwracalne	125
Ćwiczenia	126
§2. Grupy	126
1. Definicja i przykłady	126
2. Grupy cykliczne	129
3. Izomorfizmy	131
4. Homomorfizmy	134
5. Słowniczek. Przykłady	135
Ćwiczenia	138
§3. Pierścienie i ciała	140
1. Definicja i ogólne własności pierścieni	140
2. Kongruencje. Pierścień reszt	144
3. Homomorfizmy pierścieni	145
4. Rodzaje pierścieni. Ciała	146
5. Charakterystyka ciała	149
6. Uwaga o układach liniowych	152
Ćwiczenia	154

ROZDZIAŁ 5. LICZBY ZESPOLONE I WIELOMIANY **156**

§1. Ciało liczb zespolonych	156
1. Konstrukcja pomocnicza	156
2. Płaszczyzna zespolona	157
3. Interpretacja geometryczna działań na liczbach zespolonych	158
4. Potęgowanie i pierwiastkowanie	162
5. Twierdzenie o jednoznaczności	164
6. Elementarna geometria liczb zespolonych	166
Ćwiczenia	169
§2. Pierścień wielomianów	170
1. Wielomiany jednej zmiennej	171
2. Wielomiany wielu zmiennych	174
3. Algorytm dzielenia z resztą	176
Ćwiczenia	177
§3. Rozkład na czynniki w pierścieniu wielomianów	179
1. Elementarne własności podzielności	179
2. NWD i NWW w pierścieniach	182
3. Jednoznaczność rozkładu w pierścieniach euklidesowych	184
4. Wielomiany nieprzywiedlne	187
Ćwiczenia	190

§4. Ciało ułamków	191
1. Konstrukcja ciała ułamków pierścienia całkowitego	191
2. Ciało funkcji wymiernych	193
3. Ułamki proste	195
Ćwiczenia	197
ROZDZIAŁ 6. PIERWIASTKI WIELOMIANÓW	198
§1. Ogólne własności pierwiastków	198
1. Pierwiastki i czynniki liniowe	198
2. Funkcje wielomianowe	200
3. Różniczkowania pierścienia wielomianów	203
4. Czynniki wielokrotne	204
5. Wzory Viète'a	206
Ćwiczenia	208
§2. Wielomiany symetryczne	210
1. Pierścień wielomianów symetrycznych	210
2. Zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów symetrycznych	211
3. Metoda współczynników nieoznaczonych	214
4. Wyróżnik wielomianu	217
5. Rugownik	219
Ćwiczenia	222
§3. Algebraiczna domkniętość ciała $\mathbb{C}$	223
1. Sformułowanie zasadniczego twierdzenia	223
2. Dowód zasadniczego twierdzenia	224
3. Jeszcze jeden dowód zasadniczego twierdzenia	227
§4. Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych	231
1. Rozkład na czynniki nieprzywiedlne w $\mathbb{R}[X]$	231
2. Ułamki proste nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$	232
3. Problem lokalizacji pierwiastków wielomianu	234
4. Wielomiany rzeczywiste o pierwiastkach rzeczywistych	240
5. Wielomiany stabilne	242
6. Zależność pierwiastków od współczynników	243
7. Obliczanie pierwiastków wielomianu	245
8. Pierwiastki wymierne wielomianów o współczynnikach całkowitych	246
Ćwiczenia	248
DODATEK. WIELOMIANY — KILKA PROBLEMÓW OTWARTYCH	251
1. Hipoteza jakobianowa	251
2. Zagadnienie wyróżnika	253
3. Zagadnienie dwóch generatorów pierścienia wielomianów	253
4. Zagadnienie punktów krytycznych i wartości krytycznych	254
5. Zagadnienie globalnej zbieżności metody Newtona	255
Skorowidz	258