

Spis treści

Przedmowa	XI
Literatura uzupełniająca	XI
ROZDZIAŁ 1. KONSTRUKCJE TEORIOGRUPOWE	1
§1. Grupy klasyczne małych wymiarów	1
1. Ogólne definicje	1
2. Parametryzacja grup $SU(2)$ i $SO(3)$	2
3. Epimorfizm $SU(2) \rightarrow SO(3)$	3
4. Geometryczne przedstawienie grupy $SO(3)$	5
5. Kwanterniony	6
Ćwiczenia	9
§2. Warstwy względem podgrupy	11
1. Własności elementarne	11
2. Struktura grup cyklicznych	13
Ćwiczenia	14
§3. Działanie grup na zbiorach	15
1. Homomorfizmy $G \rightarrow S(\Omega)$	15
2. Orbity i podgrupy stacjonarne punktów	16
3. Przykłady działań grup	17
4. Przestrzenie jednorodne	21
Ćwiczenia	22
§4. Grupy ilorazowe i homomorfizmy	24
1. Grupa ilorazowa	24
2. Twierdzenia o homomorfizmach grup	25
3. Komutant	29
4. Iloczyny grup	31
5. Generatory i relacje	33
Ćwiczenia	38
ROZDZIAŁ 2. STRUKTURA GRUP	41
§1. Grupy rozwiązalne i proste	41
1. Grupy rozwiązalne	41
2. Grupy proste	43
Ćwiczenia	47
§2. Twierdzenia Sylowa	47
Ćwiczenia	53
§3. Skończenie generowane grupy abelowe	53

1. Przykłady i rezultaty wstępne	53
2. Grupy abelowe beztorsyjne	55
3. Skończenie generowane grupy abelowe wolne	58
4. Struktura skończenie generowanych grup abelowych	59
5. Inne podejścia do zagadnienia klasyfikacji	60
6. Podstawowe twierdzenie o skończonych grupach abelowych	64
Ćwiczenia	67
§4. Liniowe grupy Liego	68
1. Definicje i przykłady	68
2. Krzwe w grupach macierzowych	70
3. Różniczka homomorfizmu	73
4. Algebra Liego grupy Liego	74
5. Logarytm	76
Ćwiczenia	77
ROZDZIAŁ 3. ELEMENTY TEORII REPREZENTACJI GRUP	78
§1. Definicje i przykłady reprezentacji liniowych	81
1. Pojęcia podstawowe	81
2. Przykłady reprezentacji liniowych	86
Ćwiczenia	91
§2. Unitarność i przywiedlność	91
1. Reprezentacje unitarne	91
2. Całkowita przywiedlność	95
Ćwiczenia	97
§3. Skończone grupy obrotów	98
1. Rzędy skończonych podgrup w $SO(3)$	99
2. Grupy obrotów wielościanów foremnych	101
Ćwiczenia	104
§4. Charaktery reprezentacji liniowych	105
1. Lemat Schura i wnioski	105
2. Charaktery reprezentacji	107
Ćwiczenia	113
§5. Reprezentacje nieprzywiedlne grup skończonych	113
1. Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych	113
2. Wymiary reprezentacji nieprzywiedlnych	115
3. Reprezentacje grup abelowych	117
4. Reprezentacje niektórych specjalnych grup	119
Ćwiczenia	122
§6. Reprezentacje grup $SU(2)$ i $SO(3)$	125
Ćwiczenia	128
§7. Iloczyny tensorowe reprezentacji	128
1. Reprezentacja kontragredientna	128
2. Iloczyn tensorowy reprezentacji	129
3. Pierścień charakterów	130
4. Niezmienniki grup liniowych	133

Ćwiczenia	137
ROZDZIAŁ 4. PIERŚCIEŃ, ALGEBRY, MODUŁY	139
§1. Pewne konstrukcje w teorii pierścieni	139
1. Ideały i pierścienie ilorazowe	139
2. Ciało rozkładu wielomianu	141
3. Twierdzenia o izomorfizmie dla pierścieni	145
Ćwiczenia	147
§2. Wybrane twierdzenia o pierścieniach	148
1. Liczby całkowite Gaussa	148
2. Rozkład na sumę dwóch kwadratów	149
3. Rozszerzenia wielomianowe dziedzin z jednoznacznością rozkładu	151
4. Struktura grupy mnożeniowej $U(\mathbb{Z}_n)$	153
Ćwiczenia	156
§3. Moduły	157
1. Wstępne informacje o modułach	157
2. Moduły wolne	162
3. Elementy całkowite pierścienia	165
Ćwiczenia	166
§4. Algebry nad ciałem	167
1. Definicje i przykłady algebr	167
2. Algebry z dzieleniem	170
3. Algebry grupowe i moduły nad nimi	174
Ćwiczenia	183
§5. Moduły nieprzywiedlne nad algebrą Liego $sl(2)$	185
1. Informacje wstępne	185
2. Wagi i krotności	187
3. Wektor najwyższej wagi	187
4. Twierdzenie klasyfikujące	189
Ćwiczenia	190
ROZDZIAŁ 5. WSTĘP DO TEORII GALOIS	191
§1. Skończone rozszerzenia ciał	191
1. Elementy algebraiczne i stopnie rozszerzeń	191
2. Izomorfizm ciał rozkładu	196
3. Istnienie elementu pierwotnego	198
Ćwiczenia	200
§2. Ciała skończone	200
1. Istnienie i jednoznaczność	200
2. Podciała i automorfizmy ciał skończonych	202
3. Wzór Möbiusa na odwrócenie i jego zastosowania	204
Ćwiczenia	208
§3. Odpowiedniość Galois	210
1. Rezultaty wstępne	210
2. Zasadnicze twierdzenie teorii Galois	213

3. Ilustracja zasadniczego twierdzenia	214
Ćwiczenia	218
§4. Znajdowanie grupy Galois	219
1. Działanie grupy $\text{Gal}(f)$ na pierwiastkach wielomianu f	219
2. Wielomiany, których stopień jest liczbą pierwszą	221
3. Redukcja modulo p	224
4. Bazy normalne	229
Ćwiczenia	232
§5. Zagadnienia związane z rozszerzeniami Galois	233
1. Liczby pierwsze w ciągach arytmetycznych	233
2. Rozszerzenia abelowe	234
3. Norma i ślad	235
4. Rozszerzenia cykliczne	238
5. Kryterium rozwiązalności równań przez pierwiastniki	240
Ćwiczenia	243
§6. Sztywność i wymierność w grupach skończonych	244
1. Definicje i sformułowanie podstawowego twierdzenia	244
2. Liczenie rozwiązań	246
3. Przykłady sztywności	249
Ćwiczenia	250
§7. Epilog	251
DODATEK. PROBLEMY NIEROZWIĄZANE	253
1. Klasyfikacja skończonych grup prostych	253
2. Automorfizmy regularne	254
3. Dziwna algebra Liego	254
4. Problem Burnside'a	254
5. Skończone grupy automorfizmów wielomianowych	255
6. SR-grupy	255
7. Odwrotne zagadnienie Galois	256
Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń	258
Uwagi metodyczne	267
Pytania egzaminacyjne	267
Program wykładu algebry	269
Skorowidz	270