

**Matematyka dyskretna dla praktyków : algorytmy i uczenie maszynowe  
w Pythonie / Ryan T. White, Archana Tikayat Ray. – Gliwice, copyright ©  
2022**

Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| <b>O autorach</b>  | <b>11</b> |
| <b>O recenzencie</b>   | <b>12</b> |
| <b>Wprowadzenie</b>  | <b>13</b> |
| <b>Część I. Podstawowe pojęcia z obszaru matematyki dyskretniej</b>                    | <b>17</b> |
| <b>Rozdział 1. Podstawowe pojęcia, notacja, teoria mnogości,<br/>relacje i funkcje</b> | <b>19</b> |
| Czym jest matematyka dyskretna?  | 19        |
| Podstawowa teoria mnogości   | 22        |
| Definicja — zbiory i ich notacja   | 22        |
| Definicja — elementy zbiorów   | 22        |
| Definicja — zbiór pusty  | 22        |
| Przykład — kilka przykładowych zbiorów   | 22        |
| Definicja — podzbiory i nadzbiory  | 23        |
| Definicja — notacja konstrukcji zbiorów  | 23        |
| Przykład — użycie notacji konstrukcji zbiorów  | 23        |
| Definicja — podstawowe operacje na zbiorach  | 24        |
| Definicja — zbiory rozłączne   | 26        |
| Przykład — liczby parzyste i nieparzyste   | 26        |
| Twierdzenie — prawa De Morgana   | 26        |
| Przykład — prawo De Morgana  | 27        |
| Definicja — moc zbioru   | 27        |
| Przykład — moce zbiorów  | 28        |
| Funkcje i relacje  | 28        |
| Definicja — relacje, dziedziny i przeciwdziedziny                                      | 28        |
| Definicja — funkcje  | 28        |
| Przykłady — relacje kontra funkcje   | 29        |
| Przykład — funkcje w algebrze elementarnej   | 29        |
| Przykład — funkcje w Pythonie i funkcje matematyczne                                   | 30        |
| Podsumowanie   | 31        |
| <b>Rozdział 2. Logika formalna i dowody matematyczne</b>                               | <b>33</b> |
| Logika formalna i dowodzenie za pomocą tablic prawdy                                   | 34        |
| Podstawy terminologii stosowanej w logice formalnej                                    | 34        |
| Przykład — niepoprawny argument  | 35        |

|  |           |
|--|-----------|
| Przykład — wszystkie pingwiny mieszkają w RPA!                                   | 36        |
| Podstawowe idee logiki formalnej   | 37        |
| Tablice prawdy   | 38        |
| Przykład — implikacja odwrotna   | 40        |
| Przykład — prawo przechodniości implikacji                                       | 40        |
| Przykład — prawa De Morgana  | 41        |
| Przykład — implikacja przeciwstawna  | 42        |
| Dowody wprost  | 43        |
| Przykład — iloczyn parzystych i nieparzystych liczb całkowitych                  | 44        |
| Przykład — pierwiastki liczb parzystych  | 45        |
| Skrócenie dowodu za pomocą implikacji przeciwstawnej                             | 46        |
| Dowody nie wprost  | 46        |
| Przykład — czy istnieje najmniejsza dodatnia liczba wymierna?                    | 48        |
| Przykład — dowód, że 2 jest liczbą niewymierną                                   | 48        |
| Przykład — ile jest liczb pierwszych?  | 49        |
| Dowodzenie przez indukcję matematyczną   | 51        |
| Przykład — suma $1+2 + \dots + n$  | 51        |
| Przykład — kształty wypełniające przestrzeń                                      | 53        |
| Przykład — wzrost wykładniczy a wzrost w tempie silni                            | 54        |
| Podsumowanie   | 56        |
| <b>Rozdział 3. Obliczenia w systemach o podstawie n</b>                          | <b>57</b> |
| Zrozumieć liczby o podstawie n   | 58        |
| Przykład — liczby dziesiętne   | 58        |
| Definicja — liczby o podstawie n   | 59        |
| Konwersje między różnymi podstawami  | 59        |
| Konwersja liczb o podstawie n na liczby dziesiętne                               | 59        |
| Przykład — wartość dziesiętna liczby o podstawie 6                               | 60        |
| Konwersja z zapisu dziesiętnego na system o podstawie n                          | 60        |
| Przykład — konwersja liczby dziesiętnej na liczbę binarną (podstawa 2)           | 60        |
| Przykład — konwersje z systemu dziesiętnego na binarny i szesnastkowy w Pythonie | 61        |
| Liczby binarne i ich zastosowania  | 62        |
| Algebra Boole'a  | 63        |
| Przykład — użytkownicy Netfliksa   | 67        |
| Liczby szesnastkowe i ich zastosowanie   | 69        |
| Przykład — położenie obiektów w pamięci komputera                                | 70        |
| Przykład — wyświetlanie komunikatów o błędach                                    | 71        |
| Przykład — adresy MAC  | 71        |
| Przykład — kolory w sieci  | 72        |
| Podsumowanie   | 73        |
| <b>Rozdział 4. Kombinatoryka z użyciem SciPy</b>                                 | <b>74</b> |
| Podstawy zliczania   | 75        |
| Definicja — iloczyn kartezyjski  | 75        |
| Twierdzenie — moc iloczynów kartezyjskich zbiorów skończonych                    | 75        |

|  |           |
|--|-----------|
| Definicja — iloczyn kartezjański n zbiorów                             | 76        |
| Twierdzenie — reguła mnożenia  | 76        |
| Przykład — bajty   | 76        |
| Przykład — kolory w komputerze   | 77        |
| Permutacje i kombinacje obiektów                                       | 77        |
| Definicja — permutacja   | 77        |
| Przykład — permutacje prostego zbioru                                  | 77        |
| Twierdzenie — permutacje zbioru  | 78        |
| Przykład — playlista   | 78        |
| Wzrost w tempie silni  | 78        |
| Twierdzenie — wariacja bez powtórzeń                                   | 79        |
| Definicja — kombinacja   | 80        |
| Przykład — kombinacje kontra permutacje prostego zbioru                | 80        |
| Twierdzenie — kombinacje ze zbioru                                     | 80        |
| Współczynniki dwumianowe   | 80        |
| Przykład — tworzenie zespołu   | 81        |
| Przykład — kombinacje kul  | 81        |
| Alokacja pamięci   | 82        |
| Przykład — wstępne przydzielanie pamięci                               | 82        |
| Skuteczność algorytmów siłowych  | 84        |
| Przykład — szyfr Cezara  | 84        |
| Przykład — problem komiwojażera  | 87        |
| Podsumowanie   | 89        |
| <b>Rozdział 5. Elementy prawdopodobieństwa dyskretnego</b>             | <b>90</b> |
| Definicja — doświadczenie losowe                                       | 91        |
| Definicje — zdarzenia elementarne, zdarzenia losowe, przestrzenie prób | 91        |
| Przykład — rzut monetą   | 91        |
| Przykład — rzut wieloma monetami                                       | 92        |
| Definicja — miara probabilistyczna                                     | 92        |
| Twierdzenie — podstawowe własności prawdopodobieństwa                  | 93        |
| Przykład — sport   | 94        |
| Twierdzenie — monotoniczność   | 95        |
| Twierdzenie — zasada włączeń i wyłączeń                                | 95        |
| Definicja — rozkład jednostajny  | 96        |
| Twierdzenie — obliczanie prawdopodobieństwa                            | 96        |
| Przykład — rzut wieloma monetami                                       | 97        |
| Definicja — zdarzenia niezależne                                       | 98        |
| Przykład — rzucanie wieloma monetami                                   | 98        |
| Prawdopodobieństwo warunkowe i twierdzenie Bayesa                      | 99        |
| Definicja — prawdopodobieństwo warunkowe                               | 100       |
| Przykład — temperatury i opady   | 100       |
| Twierdzenie — reguły mnożenia  | 101       |
| Twierdzenie — twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym             | 102       |
| Twierdzenie — twierdzenie Bayesa                                       | 102       |
| Bayesowski filtr antyspamowy   | 103       |

|  |     |
|--|-----|
| Zmienne losowe, średnie i wariancja            | 104 |
| Definicja — zmienna losowa                     | 104 |
| Przykład — błędy przesyłania danych            | 104 |
| Przykład — empiryczna zmienna losowa           | 105 |
| Definicja — wartość oczekiwana                 | 105 |
| Przykład — empiryczna zmienna losowa           | 106 |
| Definicja — wariancja i odchylenie standardowe | 106 |
| Twierdzenie — obliczanie wariancji w praktyce  | 106 |
| Przykład — empiryczna zmienna losowa           | 107 |
| Google PageRank (część I)                      | 107 |
| Podsumowanie                                   | 110 |

## **Część II. Zastosowania matematyki dyskretnej w analizie danych i informatyce** **111**

|  |            |
|--|------------|
| <b>Rozdział 6. Algorytmy algebry liniowej</b>                                    | <b>113</b> |
| Zrozumieć układy równań liniowych  | 114        |
| Definicja — równanie liniowe dwóch zmiennych                                     | 114        |
| Definicja — kartezjański układ współrzędnych                                     | 114        |
| Przykład — równanie liniowe  | 115        |
| Definicja — układ dwóch równań liniowych dwóch zmiennych                         | 116        |
| Przykład — układ oznaczony   | 116        |
| Przykład — układ sprzeczny   | 117        |
| Przykład — układ nieoznaczony  | 119        |
| Definicja — układy równań liniowych i ich rozwiązania                            | 120        |
| Definicja — układy oznaczone, sprzeczne i nieoznaczone                           | 121        |
| Macierze i macierzowe reprezentacje układów równań liniowych                     | 121        |
| Definicja — macierze i wektory   | 122        |
| Definicja — dodawanie i odejmowanie macierzy                                     | 123        |
| Definicja — mnożenie przez skalar  | 124        |
| Definicja — transpozycja macierzy  | 125        |
| Definicja — iloczyn skalarny wektorów  | 126        |
| Definicja — mnożenie macierzy  | 126        |
| Przykład — ręczne mnożenie macierzy i mnożenie macierzy w NumPy                  | 127        |
| Rozwiązywanie małych układów równań liniowych za pomocą metody eliminacji Gaussa | 129        |
| Definicja — współczynnik wiodący   | 129        |
| Definicja — zredukowana macierz schodkowa  | 130        |
| Przykład — układ oznaczony z macierzą schodkową                                  | 130        |
| Przykład — układ sprzeczny z macierzą schodkową                                  | 130        |
| Przykład — układ nieoznaczony z macierzą schodkową                               | 131        |
| Algorytm — eliminacja Gaussa   | 131        |
| Przykład — układ 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi                             | 132        |
| Rozwiązywanie dużych układów równań liniowych za pomocą NumPy                    | 134        |
| Przykład — układ 3 równań z 3 niewiadomymi (NumPy)                               | 134        |
| Przykład — sprzeczne i nieoznaczone układy równań w NumPy                        | 135        |

|  |            |
|--|------------|
| Przykład — układ 10 równań z 10 niewiadomymi (NumPy)                                   | 136        |
| Podsumowanie   | 138        |
| <b>Rozdział 7. Złożoność algorytmów</b>  | <b>139</b> |
| Złożoność obliczeniowa algorytmów  | 139        |
| Notacja dużego O   | 143        |
| Kiedy stałe mają znaczenie?  | 147        |
| Złożoność algorytmów zawierających podstawowe instrukcje sterujące                     | 149        |
| Przepływ sekwencyjny   | 149        |
| Przepływ warunkowy   | 150        |
| Pętla  | 151        |
| Złożoność popularnych algorytmów wyszukiwania  | 155        |
| Algorytm wyszukiwania liniowego  | 155        |
| Algorytm wyszukiwania binarnego  | 156        |
| Popularne klasy złożoności obliczeniowej   | 159        |
| Podsumowanie   | 161        |
| Bibliografia   | 161        |
| <b>Rozdział 8. Przechowywanie i wyodrębnianie cech z grafów, drzew i sieci</b>         | <b>162</b> |
| Zrozumieć grafy, drzewa i sieci  | 162        |
| Definicja — graf   | 163        |
| Definicja — stopień wierzchołka  | 163        |
| Definicja — ścieżki  | 164        |
| Definicja — cykle  | 165        |
| Definicja — drzewa lub grafy acykliczne  | 165        |
| Definicja — sieci  | 166        |
| Definicja — grafy skierowane   | 167        |
| Definicja — sieci skierowane   | 168        |
| Definicja — wierzchołki sąsiednie  | 169        |
| Definicja — grafy i składowe spójne  | 169        |
| Zastosowania grafów, drzew i sieci   | 171        |
| Przechowywanie grafów i sieci  | 173        |
| Definicja — lista sąsiedztwa   | 173        |
| Definicja — macierz sąsiedztwa   | 173        |
| Definicja — macierz sąsiedztwa dla grafu skierowanego                                  | 175        |
| Wydajne przechowywanie danych sąsiedztwa   | 178        |
| Definicja — macierz wag sieci  | 178        |
| Definicja — macierz wag sieci skierowanej  | 179        |
| Wyodrębnianie cech z grafów  | 181        |
| Stopnie wierzchołków w grafie  | 181        |
| Liczba ścieżek o określonej długości między wierzchołkami                              | 182        |
| Twierdzenie — potęgi macierzy sąsiedztwa   | 183        |
| Potęgi macierzy w Pythonie   | 183        |
| Twierdzenie — najkrótsza (pod względem liczby krawędzi) ścieżka pomiędzy $v_i$ i $v_j$ | 184        |

|  |            |
|--|------------|
| Podsumowanie   | 186        |
| <b>Rozdział 9. Przeszukiwanie struktur danych i znajdowanie najkrótszych ścieżek</b> | <b>187</b> |
| Przeszukiwanie struktur grafowych i drzew  | 188        |
| Algorytm przeszukiwania w głąb (DFS)   | 188        |
| Implementacja algorytmu przeszukiwania w głąb w Pythonie                             | 191        |
| Problem najkrótszej ścieżki i jego warianty  | 193        |
| Najkrótsze ścieżki w sieciach  | 194        |
| Inne zastosowania najkrótszych ścieżek   | 194        |
| Definicja problemu najkrótszej ścieżki   | 195        |
| Sprawdzenie, czy istnieje rozwiązanie  | 196        |
| Znajdowanie najkrótszych ścieżek metodą siłową                                       | 198        |
| Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych ścieżek                                   | 201        |
| Algorytm Dijkstry  | 201        |
| Algorytm Dijkstry zastosowany do małego problemu                                     | 202        |
| Implementacja algorytmu Dijkstry w Pythonie  | 207        |
| Przykład — najkrótsze ścieżki  | 209        |
| Przykład — sieć bez połączenia   | 211        |
| Podsumowanie   | 213        |
| <b>Część III. Praktyczne zastosowania matematyki dyskretnej</b>                      | <b>215</b> |
| <b>Rozdział 10. Analiza regresji za pomocą NumPy i scikit-learn</b>                  | <b>217</b> |
| Zbiór danych   | 218        |
| Linie najlepszego dopasowania i metoda najmniejszych kwadratów                       | 220        |
| Zmienne  | 220        |
| Zależność liniowa  | 220        |
| Regresja   | 220        |
| Linia najlepszego dopasowania  | 221        |
| Metoda najmniejszych kwadratów i suma kwadratów błędów                               | 224        |
| Dopasowywanie prostej metodą najmniejszych kwadratów w NumPy                         | 226        |
| Dopasowywanie krzywych metodą najmniejszych kwadratów z użyciem NumPy i SciPy        | 229        |
| Dopasowanie płaszczyzn metodą najmniejszych kwadratów z użyciem NumPy i SciPy        | 232        |
| Podsumowanie   | 234        |
| <b>Rozdział 11. Wyszukiwanie w sieci za pomocą algorytmu PageRank</b>                | <b>236</b> |
| Rozwój wyszukiwarek na przestrzeni lat   | 237        |
| Google PageRank (część II)   | 238        |
| Implementacja algorytmu PageRank w Pythonie  | 245        |
| Zastosowanie algorytmu na danych rzeczywistych                                       | 249        |
| Podsumowanie   | 253        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Rozdział 12. Analiza głównych składowych za pomocą scikit-learn</b> | <b>254</b> |
| Wartości i wektory własne, bazy ortogonalne                            | 255        |
| Redukcja wymiarowości za pomocą analizy głównych składowych            | 260        |
| Implementacja metody PCA z scikit-learn                                | 264        |
| Zastosowanie metody PCA na rzeczywistych danych                        | 267        |
| Podsumowanie   | 270        |

oprac. BPK